2.1

采用逆向归纳法，先最大化家长的收益：给定孩子的行动 **A**，来选择自己的行动 **B,**

$$\underset{B}{Max}V(I_p-B)+k(I_c+B)$$

一阶条件：　$V'(I_p-B)=k$，　$\Rightarrow B^*=I_p(A)-V'^{-1}(k)$

接着最大化孩子的收益，给定家长的反应函数 B^*，来选 **A**：

$$\underset{A}{Max}U(I_c(A)+I_p(A)-V'^{-1}(k))$$

一阶条件：　$U'(I_c+B^*)[I_c'(A)+I_p'(A)]=0$

由于 **U** 是递增又严格凹的，$U'(I_c+B^*)\neq 0$

这与孩子的选择可是全家的收入最大化的一阶条件相同：$I_c'(A)+I_p'(A)=0$

2.2

采用逆向归纳法，先最大化家长的收益：给定的孩子的行动 **S**，来选择自己的行动 **B,**

$$\underset{B}{Max}V(I_p-B)+k[U_1(I_c-S)+U_2(S+B)]$$

一阶条件：　$V'(I_p-B)=kU_2'(S+B)$，

反应函数满足：　$-1<dB^*/dS=kU_2''/(-kU_2''-V'')<0$ 即，孩子储蓄减少，家长给予更高的赠与。

接着最大化孩子的收益：给定反应函数 B^*，来选 **S**：

$$\underset{S}{Max}U_1(I_c-S)+U_2(S+B^*)$$

一阶条件：　$U_1'(I_c-S)=U_2'(S+B^*)(1+dB^*/dS)$，由此可得：

$$0<U_1'(I_c-S)/U_2'(S+B^*)=(1+dB^*/dS)<1 \qquad (*)$$

因此当增加 **S** 时，　$U_1(I_c-S)$ 会减小，同时，$\because d(S+B)/dS>0$，$\therefore S+B$ 会增加，$\therefore U_2(S+B)$ 会增加，因为（*）式，$U_2(S+B)$ 增加的幅度比 $U_1(I_1-S)$ 减小的幅度大，所以孩子的收益效用增大了，同时家长的收益效用也增大了。

2.3

根据**Shaked**和**Sutton**的研究发现，我们可以把无限博弈截开（见**Gibbons**教材**55**页），首先分析前三阶段：

假设在第三阶段参与人**1**提出**S**，参与人**2**接受**1-S**，则解决方案为（**S**，**1-S**）。

则在第二阶段**2**提出不少于 d_1S 给参与人**1**，**1**就会接受，解决方案 $(d_1S,1-d_1S)$。

则在第一阶段参与人**1**提出不少于 $d_2(1-d_1S)$ 给参与人**2**，**2**就会接受，

解决方案为（$1-d_2(1-d_1S)$，$d_2(1-d_1S)$）

推广到无限期，从第一阶段开始的博弈和从第三阶段的博弈是一样的，

所以解：$1-d_2(1-d_1S)$=**S**　得出 $S=(1-d_2)/(1-d_1d_2)$

解决方案：$\left((1-d_2)/(1-d_1d_2),d_2(1-d_2)/(1-d_1d_2)\right)$

2.4，2.5略

2.6

采用逆向归纳法：

VISIT…

（1）在第二阶段企业2和企业3决策：

$$\underset{q_2\geq 0}{Max}\, p_2 = \underset{q_2\geq 0}{Max}[(a-q_1-q_2-q_3)q_2 - cq_2]$$

$$\underset{q_3\geq 0}{Max}\, p_3 = \underset{q_3\geq 0}{Max}[(a-q_1-q_2-q_3)q_3 - cq_3]$$

得反应函数 $\begin{cases} q_2 = \dfrac{a-c-q_1}{3} \\ q_3 = \dfrac{a-c-q_1}{3} \end{cases}$

（2）第一阶段企业1的决策：

$$Max[(a-q_1-q_2-q_3)q_1 - cq_1]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p_1}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \text{将}\quad q_2 = q_3 = \frac{a-c-q_1}{3} \text{代入得}$$

$$q_1 = \frac{a-c}{2}$$

$$\therefore q_2 = q_3 = \frac{a-c}{6}$$

2.7

采用逆向归纳法

（1）第一阶段，企业最大化其收益：

$$p_i = L_i\left(a - \sum_1^n L_j - w\right)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial L_i} = a - \sum_1^n L_j - w - L_i = -2L_i + a - w - \sum_{j\neq i} L_j = 0$$

$$\therefore L_i = \frac{1}{2}\left(a - w - \sum_{j\neq i} L_j\right)$$

$$\because L_1 = \cdots = L_n$$

$$\therefore L_i = \frac{a-w}{n+1}$$

$$\therefore L = \frac{n(a-w)}{n+1}$$

（2）第二阶段，工会最大化其收益

$$\underset{w}{Max}(w-wa)L \Rightarrow (w-wa)\frac{n(a-w)}{n+1} \Rightarrow w^* = \frac{a+wa}{2}$$

所以企业数量不影响工会效用。

2.8，2.9略

2.10

思路：逐个分析上述的四种情形：

第一种情形，第一阶段选择Qi，第二阶段选择Pi，即双方均采取合作的策略，得益均为6；

第二种情形和第三种情形下，实际上有一方是采取了不合作，其得益为x，另一方即利益受损方得益为2；
第四种情形实际上是双方都不采取合作的策略，而根据题目要求，对于x，下述战略是一个子博弈精炼纳什均衡，所以x必须小于双方均合作时的收益6，否则第一种情形不会出现，因为既然x>6了，双方均会选择不合作而使情形一不会出现。
由题目先前给定的条件x<4，综合之得x的取值为（4,6）。（可参见教材68页的分析）

2.11
能够。战略组合为：在第一阶段选择(B,R)，若第一阶段的结果是(B,R)，则第二阶段选择(T,L)；若第一阶段的结果不是(B,R)，则第二阶段选择(M,C)。
证明为子博弈完美均衡SPE：显然第二阶段的策略组合是NE，第一阶段若1偏离，不选择B而选择T，则会增加1单位收益，但在第二阶段会减少2单位收益，所以1不会偏离，若1在第一阶段选择B，则2会选择R，所以(B,R)会成为第一阶段的SPE。

2.12
略

2.13
使用触发战略，双方都采取垄断价格为： $p_i=(a+c)/2$（最大化利润 $(a-p_i)(p_i-c)$ 得出），只要任何一方违背时，以后就转向阶段博弈的价格 $p_i=c$ 。
如一直使用垄断价格，则每个企业收益每期都一样为， $p_i=(a-c)^2/8$
如在t期某企业违背了战略，t+1期开始双方的收益相同都为0，在t期它的最大收益为 $(a-c)^2/4$（考虑此企业只是把价格边际上减少一点点，所有的利润都归它），如不违背则把以后无限期的收益贴现到t期可得 $\frac{1}{1-d}(a-c)^2/8$，
触发战略有效的条件是： $\frac{1}{1-d}(a-c)^2/8>(a-c)^2/4$，得到： $d>1/2$
（可参见谢识予的《经济博弈论》习题解答）。

2.14
略

2.15
（1）垄断的产量、价格、利润：
$\pi=Q(a-Q)-CQ$
利润最大化时：$a-2Q=C$，从而 $Q=(a-c)/2$.
此时价格为(a-c)/2。
（2）古诺均衡下的产量、价格、利润：
$\pi=(a-\sum q_i)\,q_i-cq_i$

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_i}=a-\sum q_i-q_i-c=0$$

$$\Rightarrow q_i=\frac{a-c}{n+1}(i=1,2,3\cdots n)$$

价格为 $P = a - \frac{n(a-c)}{n+1} = \frac{nc+a}{n+1}$.

利润为 $p_i = \frac{nc+a}{n+1} \cdot \frac{a-c}{n+1} - c \cdot \frac{a-c}{n+1} = \left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2$

企业违背垄断产量时的各期利润：

$$p_i = \left(a - \frac{n-1}{2n}(a-c) - q_i\right) q_i - cq_i$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_i} = a - \frac{(n-1)(a-c)}{2n} - q_i - q_j - c = 0$$

$$\Rightarrow q_i = \frac{n+1}{4n}(a-c),\ p = \frac{(n+1)a + (3n-1)c}{4n}$$

利润为 $\frac{(n+1)^2}{16n^2}(a-c)^2$

要使企业不违背产量，须满足：

$$\frac{(n+1)^2}{16n^2} + d\frac{(a-c)^2}{(n+1)^2} + \cdots \le \frac{(a-c)^2}{4n^2} + d\frac{(a-c)^2}{4n} + \cdots$$

解之得：

$$d \ge \frac{(n+1)^2 - 4n(n+1)^2}{(n+1) - 16n^2} \qquad \textbf{(0< } \delta \textbf{<1)}$$

待续>>>>>>